Univerzita Karlova v Praze
Matematicko - fyzikální fakulta

Diplomová práce

Michal Komačka

Analýza strukturovaných produktů pro drobné investory

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomové práce: Mgr. Milan Bartoš

Studijní program: Finanční a pojistná matematika

2009

Na tomto mieste by som sa rád poďakoval vedúcemu diplomovej práce Mgr. Milanovi Bartošovi za poskytnutie dát a podnetných konzultácií.

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 10. decembra 2009 Michal Komačka

Obsah

Názov práce: Analýza štruktúrovaných produktov pre drobných investorov
Autor: Michal Komačka
Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky
Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Milan Bartoš
e-mail vedúceho: MBartos@csas.cz

Abstrakt: Diplomová práca sa zaoberá štruktúrovanými produktami. Popisuje najzákladnejšie oceňovacie metódy a vysvetľuje spôsob odhadu parametrov pre simuláciu náhodných veličín. Ďalej rozoberá spôsob generovania náhodnej veličiny z mnohorozmerného normálneho rozdelenia. V praktickej časti sa venujeme konkrétnym produktom. Produkty rozkladáme na zložky, simulujeme cenu podkladového aktíva a analyzujeme produkt ako celok.

Kľúčové slová: štruktúrovaný produkt, podkladové aktívum, simulácia

Title: The analysis of structured products for small investors
Author: Michal Komačka
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Milan Bartoš
Supervisor's e-mail address: MBartos@csas.cz

Abstract: The topic of this thesis is structured products. It describes the basic pricing methods and it explains technique for the estimation of the parameters of random variables simulation. We also explain process for generation of random variable from multivariate normal distribution. In the practical part of this thesis we analyse specific products. We decompose products to components, we simulate price for underlying assets and finally we analyse product as a whole.

Keywords: structured product, underlying asset, simulation

Kapitola 1

Úvod

Banky na českom trhu ponúkajú niekoľko možností ako môže drobný investor zhodnotiť voľné finančné prostriedky. Jednou z možnosti sú štruktúrované produkty. Ide o produkty, ktoré ponúkajú klientovi možnosť podieľať sa na raste podkladového aktíva v závislosti od zvolenej investičnej stratégie. V prípade nepriaznivého vývoja podkladového aktíva je klientovi vyplatená čiastka, ktorá je väčšia, rovná alebo menšia ako 100% vloženej čiastky v závislosti od typu produktu.

Nevýhodou týchto produktov je strata úroku v prípade nepriaznivej situácie v zvolenej investičnej stratégii. Pod pojmom investičná stratégia rozumieme rôzne typy štruktúrovaných produktov. Jeden môže ponúkať klientovi možnosť podieľať sa na raste cien akcií v určitom sektore, druhý môže byť naviazaný na index alebo skupinu indexov a tretí ponúknuť zvýhodnené úročenie v prípade, že sa kurz eura a českej koruny bude pohybovať vo vopred určenom pásme.

Štruktúrovaný produkt sa z pohľadu banky rozdeľuje na dve základné časti. Prvá zabezpečuje klientovi čiastku, ktorá mu bude vyplatená v prípade negatívneho vývoja podkladového aktíva. Je ňou termínovaný vklad. Druhou, pre nás zaujímavejšou, je opcia. Touto sa banka snaží naplniť druhý sľub a to podieľanie sa na raste príslušného podkladového aktíva. Kým sa dostaneme k analýze produktov, predstavíme si teóriu viažúcu sa k oceneniu opcií. Nasledovať bude pomocná kapitola, v ktorej uvedieme nástroje, ktoré nám pri našej analýze pomôžu. Štvrtá kapitola je venovaná už spomínanej analýze nami vybraných produktov z pohľadu banky, v ktorej sa bližšie zoznámime s konceptom štruktúrovaných produktov.

Výpočty prebiehali v programe Microsoft Excel. Na stanovenie ceny opcie sme implementovali naše algoritmy prostredníctvom jazyka VBA pre Excel. Dôvod použitia uvedených nástrojov plynie z ich širokého využitia na domácom bankovom trhu. Ich zvládnutie je najčastejšou požiadavkou, ktorá je kladená na uchádzača so záujmom o zamestnanie v bankovej inštitúcii na pozíciách vhodných pre študentov MFF UK.

Kapitola 2

Oceňovacie metódy

Naším cieľom bude vysvetliť formulu pre oceňovenie call opcie. Ocenenie opcie má dva prístupy. Jedným je vytvorenie diagramu (tzv. stromov), ktorý bude obsahovať rôzne možnosti vývoja ceny akcie počas života opcie. Model sa preto nazýva *Binomický strom.* Druhým z prístupov je Black-Scholesova oceňovacia formula, ktorá bude uvedená neskôr. Vzťahy ktoré odvodíme v tejto časti sú prebraté z článku [4], ktorý bol prelomovým v oblasti ocenovania opcií.

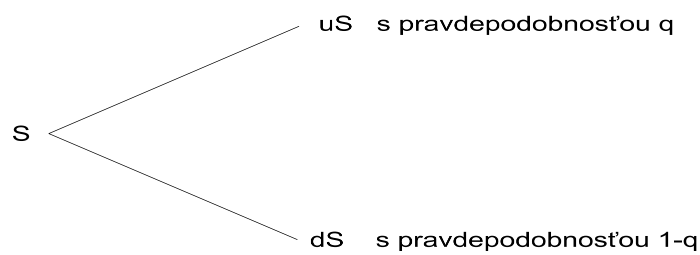
Pre vlastníka opcie, je opcia právo nakúpiť (*call opcia*) alebo predať (*put opcia*) vopred určené podkladové aktívum za dohodnutú cenu (tzv. *realizačnú cenu* alebo anglicky *Strike price*). V prípade opcie sa špecifikuje dátum splatnosti opcie (označme ho T). Z tohto hľadiska rozlišujeme opciu na dva základné typy. V prípade, že môžeme opciu uplatniť len v čase splatnosti T, hovoríme o *Európskej opcii*, no v prípade, že opciu môžeme uplatniť v ktoromkoľvek čase $t \in [0, T]$ hovoríme o *Americkej opcii.* Keďže predávajúci opcie musí realizovať obchod po tom ako kupujúci využije svoje právo, hovoríme, že predávajúci zaujíma *krátku pozíciu* a kupujúci *dlhú pozíciu.* Predávajúci sa musí podriadiť kupujúcemu, táto nevýhoda je však kompenzovaná cenou opcie tzv. *opčnou prémiou.* Rozhodovanie držiteľa opcie v danom čase t vychádza z porovnania realizačnej ceny opcie a spotovej ceny podkladového aktíva. V súvislosti s týmto pozorovaním sa zavádzajú tri termníny. Hovoríme, že opcia je *na peniazoch (at-the-money)* ak je jej realizačná cena rovná cene podkladového aktíva. Ďalší termín je *v peniazoch (in-the-money)* a to vtedy, ak je realizačná cena pre držiteľa opcie výhodnejšia ako cena podkladového aktíva (to znamená, že u call opcie je cena podkladového aktíva vyššia ako realizačná cena a u put opcie je cena podkladového aktíva nižšia ako realizačná cena). Posledný termín je *mimo peniaze (out-of-money)*, ak je realizačná cena pre držiteľa opcie menej výhodná ako cena podkladového aktíva.

2.1 Binomické stromy

2.1.1 Jednokrokový binomický strom

Chceme nájsť formulu pre súčasnú cenu call opcie. Na začiatok potrebujeme niekoľko predpokladov

1. Predpokladajme, že súčasná strike price je S a v nasledujúcej perióde môže nadobudnúť buď hodnotu uS s pravdepodobnosťou q alebo hodnotu dS s pravdepodobnosťou $1 - q$



Obr. 2.1: Cena akcie

2. úroková miera je konštantná a jednotlivec si môže požičiť alebo uložiť peniaze za túto úrokovú mieru v takom množstve v akom si praje

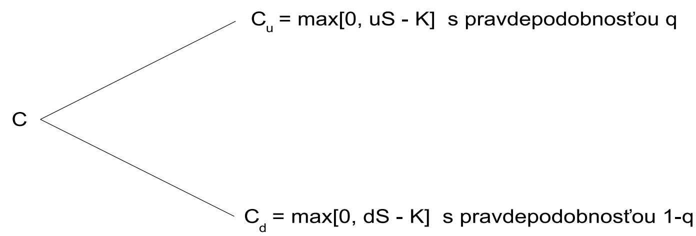
3. žiadne dane

4. žiadne transakčné náklady

5. žiadne požiadavky na zálohu (tzv. margin requirement)

6. ak označíme $r = 1 + i$, kde i je bezriziková úroková miera, požadujeme $u > r > d$

Označme C súčasnú cenu call opcie, C_u jej hodnotu na konci periódy ak cena akcie bude uS a C_d jej hodnotu na konci periódy ak ceny akcie bude dS. Tento predpoklad je znázornený na obrázku 2.2, kde K odpovedá realizačnej cene. Uvažujme ďalej nasledujúce portfólio obsahujúce Δ akcií a v dolároch



Obr. 2.2: Cena call opcie

vyjadrenú hodnotu B v bezrizikových dlhopisoch. Hodnota nášho portfólia je teda $\Delta S + B$. Na konci periódy bude hodnota portfólia buď $\Delta uS + rB$ s pravdepodobnosťou q alebo $\Delta dS + rB$ s pravdepodobnosťou $1 - q$.

Pretože poznáme hodnotu call opcie na konci periódy, môžeme zostrojiť portfólio s nasledujúcimi vlastnosťami

$$\Delta uS + rB = C_u$$

$$\Delta uS + rB = C_d$$

tak, že vyriešime sústavu a dostaneme

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S}, \quad B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r} \tag{2.1}$$

Pri stanovení súčasnej hodnoty call opcie, môžeme vyskúsať všetky tri možnosti. V prípade, že by bola súčasná hodnota call opcie menšia ako súčasná hodnota nášho portfólia, teda ak $C < \Delta S + B$, potom by sme mohli kúpiť call opciu a predať portfólio a uskutočniť tak bezrizikový zisk. Druhou možnosťou by bolo, keby $C > \Delta S + B$. Potom by sme jednoducho predali call opciu a kúpili portfólio. V obidvoch prípadoch by teda existovala arbitrážna prížitosť. Našou poslednou možnosťou je teda aby $C = \Delta S + B$. Potom

$$C = \Delta S + B = \frac{C_u - C_d}{u-d} + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r} = \frac{\left[\left(\frac{r-d}{u-d}\right)C_u + \left(\frac{u-r}{u-d}\right)C_d\right]}{r} \tag{2.2}$$

Ak označíme $p = \frac{r-u}{u-d}$ potom môžeme poslednú rovnicu prepísať do tvaru

$$C = \frac{[pC_u + (1-p)C_d]}{r} \tag{2.3}$$

Musíme však zdôrazniť a upozorniť čitateľa, že formula na ocenenie opcie daná vzťahom (2.3) neobsahuje pravdepodobnosti o pohybe akcie smerom nahor alebo nadol. To znamená, že i keď rôzni investori majú rôzne subjektívne pravdepodobnosti o pohybe akcie smerom nahor a nadol, vždy sa zhodnú na oceňovacej formule danej vzťahom (2.3). Ďalej je zvykom interpretovať p v rovnici (2.3) ako pravdepodobnosť pohybu akcie smerom nahor a $1-p$ ako pravdepodobnosť pohybu akcie smerom nadol. Výraz

$$\frac{[pC_u + (1-p)C_d]}{r} \tag{2.4}$$

je potom očakávaný výnos z opcie a teda rovnica (2.3) hovorí, že hodnota opcie je očakávaný budúci výnos diskontovaný bezrizikovou úrokovou mierou. Ak je pravdepodobnosť pohybu akcie smerom hore p, potom očakávaný výnos z akcie je

$$E(S_T) = pSu + (1-p)Sd \tag{2.5}$$

a keďže $p = \frac{r-u}{u-d}$, po úpravach dostávame

$$E(S_T) = Se^{rT} \tag{2.6}$$

z čoho vyplýva, že akcia rastie priemerne bezrizikovou úrokovou mierou.

2.1.2 Dvojkrokový binomický strom

Ak pridáme ďalšiu periódu, schéma pre cenu akcie bude mať tvar ako na obrázku (2.3) a schéma pre cenu opcie bude mať tvar zobrazený na obrázku (2.4) Ak budeme postupovať smerom od konca na začiatok, dostaneme sa najskôr k tomu istému problému ako v predchádzajúcej sekcii. Preto

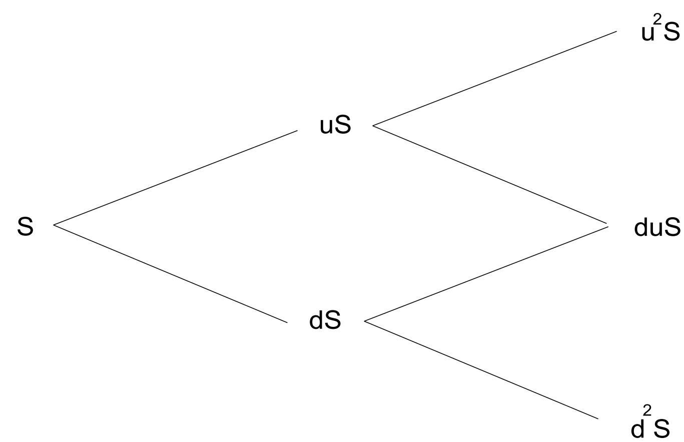
$$C_u = \frac{[pC_{uu} + (1-p)C_{ud}]}{r} \quad C_d = \frac{[pC_{du} + (1-p)C_{dd}]}{r} \tag{2.7}$$

Pre čas 0 bude platiť

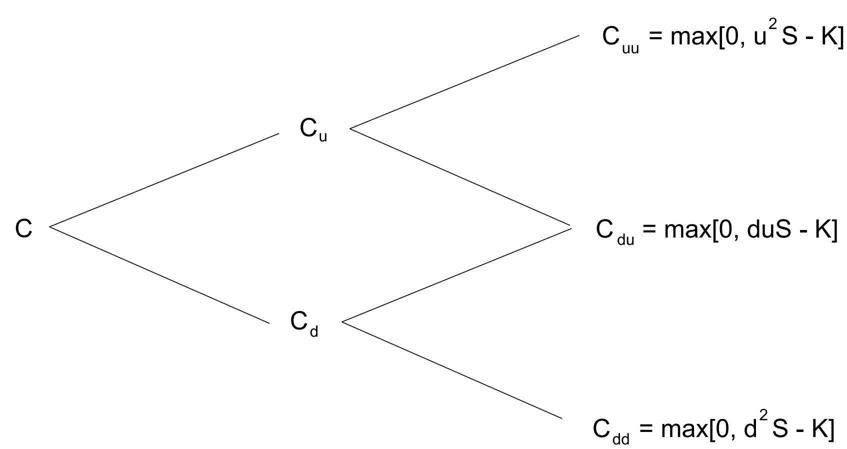
$$C = \frac{[pC_u + (1-p)C_d]}{r} \tag{2.8}$$

Ak dáme dohromady vzorce (2.7) a (2.8) dostaneme

$$C = \frac{[p^2C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2C_{dd}]}{r^2} \tag{2.9}$$



Obr. 2.3: Cena akcie pre dve obdobia



Obr. 2.4: Cena opcie pre dve obdobia

2.1.3 Oceňovacia formula

Pre ľubovoľný počet periód a pracujúc odzadu sa dostávame k vzťahu

$$C = \frac{\left[\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right) p^j (1-p)^{n-j} max\left[0, u^j d^{n-j} S - K\right]\right]}{r^n} \tag{2.10}$$

V článku [4] bol vyššie uvedený vzťah zjednodušený. Označíme a najmenšie číslo, ktoré odpovedá počtu pohybov akcie smerom nahor, aby akcia po uplynutí n periód skončila v peniazoch. Naše a bude teda najmenšie nezáporné celé číslo, pre ktoré platí $u^a d^{n-a} S > K$. Potom

$$max\left[0, u^j d^{n-j} S - K\right] = 0 \qquad \text{pre všetky} j < a \tag{2.11}$$

$$max\left[0, u^j d^{n-j} S - K\right] = u^j d^{n-j} S - K \qquad \text{pre všetky} j \geq a \tag{2.12}$$

Potom

$$C = \frac{\left[\sum_{j=a}^{n} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right) p^j (1-p)^{n-j} \left[u^j d^{n-j} S - K\right]\right]}{r^n} \tag{2.13}$$

Ak rozdelíme poslednú rovnicu do dvoch častí, máme

$$\begin{aligned} C = S \left[\sum_{j=a}^{n} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right) p^j (1-p)^{n-j} \left(\frac{u^j d^{n-j}}{r^n}\right)\right] - \\ - K r^{-n} \left[\sum_{j=a}^{n} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right) p^j (1-p)^{n-j}\right] \end{aligned} \tag{2.14}$$

Posledné zjednodušenie bude, ak označíme $\tilde{p} = (\frac{u}{r})p$ a $1 - \tilde{p} = (\frac{d}{r})(1-p)$. Prvý výraz je doplnková binomická distribučná funkcia $\phi\left[a, n, \tilde{p}\right]$ a druhý $\phi\left[a, n, p\right]$. Zhrňme teda všetko do jedného uceleného bloku. Binomická opčná oceňovacia formula má tvar

$$C = S\phi\left[a, n, \tilde{p}\right] - K r^{-n} \phi\left[a, n, p\right] \tag{2.15}$$

kde

$$p = \frac{(r-d)}{u-d} a\tilde{p} = \frac{u}{r} p$$

$$a = \text{najmenšie nezáporné celé číslo väčšie než} \quad \frac{\log(K/Sd^n)}{\log(u/d)}$$

$$\text{Pričom ak} \quad a > n, \quad \text{potom} \quad C = 0$$

2.2 Black - Scholesov model

V tejto podkapitole si predstavíme najznámejší model na ocenenie opcie, ktorá nevypláca dividendy. Model vynašli Fischer Black, Myron Scholes a Robert Merton v roku 1970. Jeho význam na trhu bol obrovský a trh začal rýchlo rásť. V roku 1997 bola za tento model udelená Nobelova cena za ekonómiu. Buhužiaľ, Fischer Black sa už tejto ceremónie nezúčastnil, pretože v roku 1995 zomrel.

2.2.1 Itôova formula

Definícia 2.1. Nech $W : [0, \infty) \times \Omega \to (R, \mathcal{B}(R))$ je stochastický proces s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. $W(0) = 0$
2. Každá trajektória $t \to W(t)$ je spojitá
3. Pre lubovoľné časové okamžiky $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \infty, k \in N$ sú náhodné veličiny (prírastky) $W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_k) - W(t_{k-1})$ navzájom nezávislé.
4. Pre $0 \leq s < t$ platí $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, (t - s))$, t.j. $W(t) - W(s)$ má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a rozptylom $t - s$.

Potom sa W nazýva *Brownov pohyb* resp. *Wienerov proces.*

Lemma 2.2. *Nech X je Itôov proces $dX = \mu dt + \sigma dB_t$, $g(t, x)$ funkcia patriaca do $C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$. Potom*

$$Y_t := g(t, X_t)$$

je opäť Itôov proces a platí

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial g}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X(t))\sigma^2 dt \\ &= \left[\frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))\mu + \frac{\partial g}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X(t))\sigma^2\right] dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))\sigma dB_t \end{aligned} \tag{2.16}$$

Rovnicu (2.16) nazývame Itôova formula alebo Itôovo lemma.

2.2.2 Black-Scholesova diferenciálna rovnica

Na odvodenie Black - Scholesovej diferenciálnej rovnice potrebujeme nasledujúce predpoklady:

1. Cena podkladovej akcie je modelovaná procesom
$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$
kde μ a σ sú konštantné
2. Predaj na krátko je bez poplatkov
3. Neexistujú žiadne transakčné náklady alebo dane
4. Opcia je európska
5. Akcia nevypláca žiadne dividendy
6. Bezriziková úroková miera je známa a konštantná v čase
7. Je možné požičať si akýkoľvek podiel z ceny cenného papiera za účelom nákupu alebo držania, a to za bezrizikovú úrokovú mieru

Nech teda

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{2.17}$$

a označme $f_t = f(t, S_t)$ cenu call opcie na S_t. Použitím Itôovho lemma dostaneme

$$\begin{aligned} df_t = &\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t, S_t)\mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2 \right) dt \\ &+ \frac{\partial f}{\partial s}(t, S_t)\sigma S_t dB_t \end{aligned} \tag{2.18}$$

Diskrétne podoby rovníc (2.17) a (2.18) sú

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta B_t \tag{2.19}$$

a

$$\begin{aligned} \Delta f_t = &\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t, S_t)\mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t \\ &+ \frac{\partial f}{\partial s}(t, S_t)\sigma S_t \Delta B_t \end{aligned} \tag{2.20}$$

kde ΔS_t a Δf_t sú zmeny S_t a f_t v malom časovom intervale Δt. K Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnici môžeme dôjsť nasledovne. Zostrojme portfólio v ktorom sme v krátkej pozícii na call opcii a dlhej pozícii na akciách, ktorých množstvo bude $\frac{\partial f}{\partial s}$. Naše portfólio bude mať hodnotu

$$\Pi := -f + \frac{\partial f}{\partial s} S \tag{2.21}$$

Zmena $\Delta\Pi$ v hodnote portfólio za interval Δt bude potom

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial s} \Delta S \tag{2.22}$$

t.j. zmenou ceny opcie a ceny podkladovej akcie. Substitúciou (2.19) a (2.20) do rovnice (2.22) dostaneme

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \tag{2.23}$$

Pretože rovnica (2.23) neobsahuje ΔW_t, portfólio musí byť bezrizikové počas intervalu Δt. Použitie predpokladov uvedených vyššie nám implikuje, že portfólio musí mať výnos rovnaký ako bezrizikové cenné papiere a preto musí platiť

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \tag{2.24}$$

kde r je bezriziková úroková miera. Substitúciou z rovnice (2.21) a (2.23) do (2.24) dostaneme

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t = r \left(f - \frac{f}{s} S \right) \Delta t \tag{2.25}$$

čiže

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r \frac{\partial f}{\partial s} S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \sigma^2 S^2 = rf \tag{2.26}$$

Rovnica (2.26) sa nazýva *Black-Scholesova diferenciálna rovnica*. Riešením rovnice je možné získať opčnú oceňovaciu formulu. My sa však vyberieme inou, názornejšou cestou, ktorú vysvetlíme v nasledujúcej kapitole.

2.2.3 Oceňovacia formula

K dosiahnutiu nášho cieľa, ktorým je vzorec pre cenu call opcie v čase t, je potrebné zaviesť *Markovskú vlastnosť* a *Translačnú hustotu.*

Markovská vlastnosť
Nech $0 \leq t_0 < t_1$, sú dané a nech $h(y)$ je funkcia. Označme $E^{t_0,x}h(X(t_1))$ očakávanú hodnotu $h(X(t_1))$, ak platí $X(t_0) = x$. Nech $\xi \in \mathbb{R}$ je dané a počiatočná podmienka je $X(t_0) = \xi$. O Markovskej vlastnosti hovoríme, ak platí

$$E^{0,\xi}\left[h(X(t_1))|\mathcal{F}_{t_0}\right] = E^{x,X(t_0)}h(X(t_1))$$

Inak povedané, ak pozorujeme trajektóriu Brownovho pohybu z času 0 do času t_0 a na základe týchto informácií chceme odhadnúť $h(X(t_1))$, jediná relevantná informácia je hodnota $X(t_0)$

Translačná hustota
Označme $p(t_0, t_1; x, y)$ podmienenú hustotu v premennej y $X(t_1)$ za podmienky $X(t_0) = x$. Inak povedané

$$E^{x,X(t_0)}h(X(t_1)) = \int_{\mathbb{R}} h(y)p(t_0, t_1; x, y)dy$$

Markovská vlastnosť hovorí, že pre $0 \leq t_0 < t_1$ a pre každé ξ platí

$$E^{0,\xi}\left[h(X(t_1))|\mathcal{F}_{t_0}\right] = \int_{\mathbb{R}} h(y)p(t_0, t_1; x, y)dy$$

Konečne sme sa dostali ku časti, v ktorej načrtneme hrubú kostru odvodenia Black Scholesovho vzorca pre cenu call opcie v čase t. Predpokladajme, že stochastický proces X_t je proces, ktorý modeluje cenu podkladovej akcie, t.j. spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

s počiatočnou podmienkou $X(t_0) = x$. Ak prejdeme do rizikovo neutrálneho sveta, potom môžeme za parameter μ, ktorý sa interpretuje ako očakávaný nárast ceny, voliť bezrizikovú úrokovú mieru r. σ sa interpretuje ako miera kolísania ceny akcie (volatilita). Ak teda rovnicu prepíšeme na

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dB_t$$

jej riešením je tzv. geometrický Brownov pohyb

$$X(t_1) = x \exp\left\{\sigma(B(t_1) - B(t_0)) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_1 - t_0)\right\}$$

V knihe [9], príklad 16.4 je odvodená translačná hustota pre geometrický Brownov pohyb v tvare

$$
\begin{aligned}
&p(t_0, t_1; x, y) \\
&\quad = \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} \exp\left\{ \frac{-1}{2(t_1 - t_0)\sigma^2} \left[\log \frac{y}{x} - (r - \frac{\sigma^2}{2})(t_1 - t_0) \right]^2 \right\} dy
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Použitím translačnej hustoty a úprav, môžeme spočítať očakávaný payoff z európskej call opcie:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^{t,x}(X(T) - K)^+ &= \int_0^\infty (y - K)^+ p(t, T; x, y) dy \\
&= e^{r(T-t)} x \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\log \frac{x}{K} + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) \right] \right) \\
&\quad - K\Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\log \frac{x}{K} + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) \right] \right)
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

kde

$$
\Phi(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\eta} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\eta}^{-\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx
$$

Potom

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^{0,\xi}\left[e^{-r(T-t)} (X(t) - K)^+ | \mathcal{F}(t) \right] &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{t,X(t)}((X(t) - K)^+) \\
&= X(t)\Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\log \frac{X(t)}{K} + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) \right] \right) \\
- e^{-r(T-t)} K\Phi&\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\log \frac{X(t)}{K} + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) \right] \right)
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

Rovnicu (2.29) nazývame *Black-Scholesova opčná oceňovacia formula.*

Uvedená formula nevyzerá veľmi prehľadne, preto ju preznačíme a upravíme (budeme uvažovať $t = 0$), tak ako to je bežné v iných literatúrach. Zároveň pre kompletnosť uvedemie aj vzorec pre cenu Európskej put opcie. Nech je teda c cena Európskej call opcie v čase 0, na akciu, ktorá nemá dividendy a p cena Európskej put opcie, taktiež na akciu, ktorá neposkytuje dividendy. Potom môžeme písať

$$c = X_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) \tag{2.30}$$

$$p = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - X_0\Phi(-d_1) \tag{2.31}$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(X_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(X_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Na záver zopakujeme značenie použité v predchádzajúcich vzťahoch. X_0 je cena akcie v čase 0, K je realizačná cena, r bezriziková úroková miera, σ je volatilita akcie a T je čas do splatnosti opcie.

2.3 Monte - Carlo simulácie

Metóda Monte Carlo je vo finančných aplikáciách často jediná metóda vhodná na ocenenie väčšiny komplikovaných derivátov. Dôvodom popularity týchto simulácií je skutočnosť, že sa vyhneme zložitým analytickým riešeniam, ktoré vznikajú pri týchto derivátoch. Princíp metódy Monte Carlo je v opakovanej simulácií náhodného pokusu. Takto si vytvoríme súbor hodnôt, z ktorého sa snažíme odhadnúť strednú hodnotu a ďalšie číselné charakteristiky. Používame pritom skutočnosť, že pre postupnosť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezávislých, rovnako rozdelených náhodných veličín so strednou hodnotou μ a konečným rozptylom platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu \quad \text{s pravdepodobnosťou 1}$$

To nám hovorí, že strednú hodnotu môžeme odhadnúť aritmetickým priemerom náhodne generovaných čísel z pravdepodobnostného rozdelenia príslušnej náhodnej veličiny.

Nech S je podkladové aktívum s dobou splatnosti T a majme derivát, ktorý je závislý na tomto podkladovom aktíve. Predpokladajme, že S je modelované procesom (2.17), kde μ je očakávaná bezriziková výnosnosť a σ je volatilita. Pre simulovanie rozdelíme $[0, T]$ na N krátkych intervalov dĺžky Δt. Rovnica (2.17) bude mať potom tvar

$$S(t+\Delta t) - S(t) = \mu S(t)\Delta t + \sigma S(t)\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

kde $S(t)$ označuje hodnotu S v čase t, ϵ je náhodné číslo z $\mathcal{N}(0,1)$. V praxi sa častejšie používa simulovanie lnS namiesto S. Z Itôovej formule potom dostávame

$$d\ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dt$$

resp.

$$\ln S(t+\Delta t) - \ln S(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

To môžeme evivalentne zapísať v tvare

$$S(t+\Delta t) = S(t)\exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}\right]$$

Tento vzťah sa používa pre simuláciu ceny aktíva S. Výhodou pracovania s lnS je to, že sleduje obecný Wienerov proces, tzn., že rovnica

$$\ln S(T) - \ln S(0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\epsilon\sqrt{T}$$

je správna pre všetky T. Z toho vyplýva, že

$$S(T) = S(0)\exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\epsilon\sqrt{T}\right] \tag{2.32}$$

V prípade, že budeme potrebovať oceniť opciu, ktorá má n podkladových aktív, budeme simulovať zvlášť vývoj každého z n podkladových aktív θ_i, kde $i = 1\dots n$. Časový interval opäť rozdelíme na N úsekov

$$\theta_i(t+\Delta t) - \theta_i(t) = m_i\theta_i(t)\Delta t + s_i\theta_i(t)\epsilon_{it}\sqrt{\Delta t}$$

kde s_i sú volatility, m_i sú príslušné miery výnosnosti, ϵ_{it} je náhodné číslo zo štandardného normálneho rozdelenia s kovariančnou maticou $(\rho_{ik})_{i,k=1\dots n}$ a $\rho_{i,k}$ je korelačný koeficient medzi Θ_i a Θ_k.

Podkladové aktívum nemusí byť ale len akcia. Z tohto dôvodu je preto dôležité uviesť, že ak pracujeme s podkladovým aktívom, ktorým je menový kurz (napr. EUR/CZK), potom $S(t)$ predstavuje spotový menový kurz, $\mu = r - r_f$, kde r odpovedá bezrizikovej úrokovej miere v domácej mene, r_f bezrizikovej úrokovej miere v cudzej mene, a σ je volatilita menového kurzu. Rovnica (2.17) bude mať preto tvar

$$dS = (r - r_f)Sdt + \sigma SdB. \tag{2.33}$$

Na záver tejto kapitoly uveďme, že na implementáciu Monte Carlo simulácií použijeme program Microsoft Excel. Ak predpokladáme, že trh sa riadi Black - Scholesovým modelom použijeme nasledovný algoritmus:

1. Pomocou náhodného generátora simulujeme cestu pre podkladové aktívum S s dátumom splatnosti T
2. Vypočítame výplatu z derivátu a diskontujeme ho bezrizikovou úrokovou mierou do času 0
3. Kroky 1 a 2 opakujeme veľký počet krát aby sme získali dostatočný počet simulácií
4. Spočítame priemer našich diskontovaných výnosov, ktorý je už podľa vyššie uvedenej teórie odhadom strednej hodnoty

2.3.1 Prevod swapových sadzieb na zero sadzby

Aby sme sa mohli vysvetliť spôsob akým budeme odhadovať trednovú zložku, musíme zaviesť teóriu o bezkupónových úrokových sadzbách. Pod pojmom n - ročná bezkupónová úroková sadzba (zero sadzba) rozumieme úrokovú sadzbu, ktorá odpovedá obdobiu začínajúcemu dnes a trvá n rokov. Počas týchto n rokov nemáme žiadne medziplatby. To znamená, že ak máme napríklad n ročnú zero sadzbu vo výške r% p.a. a spojité úročenie, potom vklad X vzrastie za obdobie n rokov na hodnotu

$$X \times e^{rn}$$

Zero sadzby získame zo swapových sadzieb. Postupovať budeme nasledovne. Swapové sadzby, ktoré máme k dispozícii z trhu prevedieme na príslušné diskotné faktory, využívajúc vzťahu

$$1 = cf_n df_1 + cf_n df_2 + cf_n df_3 + \ldots + (1 + cf_n) df_n$$

kde

- cf_n je kupón pre n - ročný swap
- df_i je diskotný faktor príslušný danej perióde $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Keďže si pre každú sadzbu potrebujeme vypočítať hodnotu df_n, vyššie uvedený vzťah upravíme na tvar

$$df_n = \frac{1 - \sum_{i=1}^{n-1} df_i cf_n}{1 + cf_n} \tag{2.34}$$

2.3.2 Odhad trendovej zložky

Na odhad trendovej zložky sa používa forwardový kurz, ktorý si dopočítame zo zero sadzieb. Postup je nasledovný. K dispozícii máme swapové sadzby k určitým obdobiam, ako napríklad 1 rok, 2 roky, 3 roky atď. Z nich si vypočítame príslušné diskontné faktory podľa vzťahu (2.34). Na získanie diskontných faktorov počas medziobdobí použijeme interpoláciu. Potom prevedieme diskontné faktory podľa klasickej definície diskotného faktoru[1] na zero sadzby.

2.3.3 Odhad volatility

Cena akcie sa zvykne pozorovať vo fixných intervaloch, napríklad každý deň. Majme $n+1$ pozorovaní a definujme S_i cenu akcie na konci i-tého intervalu, kde $i = 0, 1, \ldots, n$. Nech ďalej τ je dĺžka intervalu vyjadrená v rokoch a nech

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right), \quad \text{pre} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Odhad štandardnej odchýlky sa zvykne značiť s a je

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \tilde{u})}$$

kde $\tilde{u}$ je priemer z u_i.

[1]napríklad pre obdobie 1 roka máme diskotný faktor daný vzťahom $\frac{1}{1+i}$, kde i je nami hľadná zero sadzba

Z rovnice (3.6) vieme, že štandardná odchýlka u_i je $\sigma\sqrt{\tau}$. Z toho vyplýva, že s je odhad $\sigma\sqrt{\tau}$. Ak označíme $\widehat{\sigma}$ ako odhad σ, potom

$$\widehat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

Stanovenie počtu pozorovaní na odhad volatility nie je jednoduchý, no traduje sa, že ak odhadujeme 2 ročnú volatilitu, máme použiť 2 ročné historické dáta.

Pripomíname, že pod 1 rokom nerozumieme 365 dní ale len 252 obchodných dní v roku. Na prepočet sa používa vzťah

$$\text{Ročná volatilita} = \text{Volatilita za obchodný deň} \times \sqrt{\text{Počet obchodných dní v roku}}$$

Zaveďme ešte jeden termín. Ak budeme mať dané hodnoty parametrov S, K, T, R a cenu opcie C potom definujeme *implikovanú volatilitu* σ_{impl} ako hodnotu, pre ktorú platí

$$C = BS(S, K, T, r, \sigma_{impl})$$

kde BS označuje Black-Scholesovu oceňovaciu formulu danú vzťahom (2.29).

Kapitola 3

Postupy a nástroje používané pri oceňovaní

Ak by sme potrebovali simulovať cenu akcie, môžeme k analýze využiť vedomosti o rozdelení akcie. V tejto kapitole si odvodíme rozdelenie ceny akcie, ktoré nám pomôže dať odpoveď na otázku, v akom intervale sa môže pohybovať cena akcie, ak vieme jej počiatočnú hodnotu, očakávanú výnosnosť a volatilitu.

V druhej časti vysvetlíme pojem korelácie na menových kurzoch. Čitateľ si ľahko môže rozmyslieť jej aplikáciu na ďalšie podkladové aktíva, ako komodity alebo akcie. Tento nástroj využijeme na vytvorenie tabuliek u podkladových aktív jednotlivých produktov.

Pri simulovaní podkladových aktív musíme pracovať s mnohorozmerným normálnym rozdelením. V tretej časti sa s ním zoznámime a uvedieme, s akými funkciami budeme pracovať v programe Excel.

3.1 Rozdelenie ceny akcie

Vrátime sa k procesu, ktorý sa zvykne používať pre cenu akcie, ktorá nevypláca žiadne dividendy. Vieme, že očakávaný percentuálny výnos z akcie je závislý na cene akcie. To znamená, že ak investor vyžaduje očakávaný výnos 10% ročne z akcie, ktorá je na úrovní \$10, potom, ceteris paribus vyžaduje aj 10% z ceny akcie, ktorá je na úrovni \$50. Ak túto skutočnosť zobecníme a S bude cena akcie v čase t, potom očakávaná miera výnosnosti akcie bude

μS, pre nejaký konštatný parameter μ. To znamená, že v krátkom časovom intervale dĺžky Δt bude nárast S vo veľkosti $\mu S \Delta t$. Ak bude volatilita akcie nulová, dostávame

$$\Delta S = \mu S \Delta t$$

a limitným prechodom $\Delta t \to 0$ máme

$$dS = \mu S dt$$

respektíve

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

Integrovaním poslednej rovnice cez interval $[0, T]$ dostávame

$$S_T = S_0 e^{\mu T} \tag{3.1}$$

kde S_0 a S_T sú ceny akcie v čase 0 a T. Rovnica (3.1) znamená, že ak je rozptyl nulový, potom cena akcie rastie spojitým úročením mierou μ za jednotku času.

V skutočnosti však akcie vykazujú volatilitu, čo podobnou analýzou ako pri trendovej zložke vedie k modelu

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{3.2}$$

alebo

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \tag{3.3}$$

kde σ je volatilita akcie, μ je očakávaná miera výnosnosti a dz je Wienerov proces. Diskrétna verzia vyššie uvedeného modelu ma tvar

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \epsilon \sqrt{\Delta t} \tag{3.4}$$

alebo

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \tag{3.5}$$

kde ϵ má štandardné normálne rozdelenie. Ľavá strana rovnice (3.5) odpovedá výnosu z akcie v krátkom časovom intervale Δt. Výraz $\mu \Delta t$ je očakávaná hodnota a $\sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$ je stochastická zložka. Rovnica (3.5) teda ukazuje, že

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t) \tag{3.6}$$

Ak chceme zistiť rozdelenie ceny akcie v čase T, využijeme Itôovu formulu, ktorú sme zaviedli v časti 2.2.2 spolu so skutočnosťou, že

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

je Itôov proces, t.j. v rovnici (**??**) máme konštantné parametre μ a σ. Z Itôovej lemmy vieme, že pre funkciu G, ktorá bude funkciou S a t platí

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz \qquad (3.7)$$

Ak zvolíme $G = \ln S$, potom

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}; \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

a z rovnice (3.7) dostávame

$$dG = (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) dt + \sigma dz$$

Z toho plynie, že $\ln S$ je medzi 0 a T normálne rozdelené so strednou hodnotou $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T$ a rozptylom $\sigma^2 T$, t.j.

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right] \qquad (3.8)$$

respektíve

$$\ln S_T \sim \phi \left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right] \qquad (3.9)$$

kde S_T je cena akcie v čase T, v čase 0. Hovoríme, že veličina má logaritmicko - normálne rozdelenie, ak má prirodzený logaritmus tejto náhodnej veličiny normálne rozdelenie. A to je presne náš prípad. Veličina $\ln S_T$ má normálne rozdelenie, z čoho plynie, že S_T má logaritmicko - normálne rozdelenie. Platí, že ak má veličina S logaritmicko - normálne rozdelenie, t.j. $\ln S \sim \mathcal{N}(m, b^2)$, potom

$$ES = e^{m + \frac{1}{2} b^2}$$

$$VarS = m^2 \left(e^{b^2} - 1 \right)$$

t.j. s našimi parametrami máme po úpravách

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T}$$

$$Var(S_T) = S_0^2 e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1)$$

Ak požadujeme stanovenie intervalu pohybu akcie s 95% spoľahlivosťou, v akom rozmedzí sa bude táto akcia pohybovať? Odpoveďou na tieto otázky môže byť názorný príklad.

Uvažujme akciu s počiatočnou cenou \$70 a očakávanou výnosnosťou 15% ročne. Nech je volatilita akcie 30%. V akom intervale sa bude pohybovať cena akcie počas roka s 95% spoľahlivosťou? Vieme, že

$$\ln S_T \sim \phi\left[\ln 70 + \left(0,15 - (0,3)^2\right), (0,3)^2\right]$$

$$\ln S_T \sim \phi[4,308; 0,09]$$

2,5% kvantil normálneho rozdelenia má hodnotu 1,96. Platí teda

$$4,308 - 1,96 \times 0,09 < \ln S_T < 4,308 + 1,98 \times 0,09$$

$$e^{4,308-1,96\times 0,09} < S_T < e^{4,308+1,98\times 0,09}$$

Po vyčíslení dostávame požadovaný interval

$$62,28 < S_T < 88,62$$

3.2 Korelácia a jej využitie vo finančnom sektore

Definícia 3.1. Nech X a Y sú náhodné veličiny s konečnými 2. momentami. *Koreláciu*, resp. *korelačný koeficient*, ktorú značíme corr(X,Y) definujeme ako

$$corr(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)var(Y)}}$$

kde cov(X,Y) je kovariancia náhodných veličín X a Y a var(X) je rozptyl náhodnej veličiny X. Medzi základné vlastnosti korelačného koeficientu patrí, že jeho hodnota sa nachádza medzi -1 a 1.

Ak definíciu prenesieme do finančného sektora, môžeme napríklad skúmať, aký je vzťah medzi menovými pármi EUR/RUB a EUR/TRY. Inak povedané, môžeme si položiť otázku, či apreciácia (zhodnotenie) eura k rublu znamenala taktiež apreciáciu eura ku tureckej líre. Korelácia je práve ten ukazovateľ, ktorý nám dá odpoveď, ako sú tieto páry na sebe závislé. Na jej výpočet sa používajú historické dáta z obidvoch skúmaných párov. Výsledná hodnota, ako už vieme, sa bude nachádzať medzi -1 a 1. Jej finančná interpretácia je nasledovná. Predstavme si, že skúmame vzájomný vzťah vyššie uvedených párov z historických dát za obdobie jedného mesiaca a obdržaný výsledok má hodnotu $+0,81$ (viď tabuľka A.1). To znamená, že 81% času v danom mesiaci sa obidve meny pohybovali v tom istom smere. Ak došlo k apreciácii eura k rubľu (teda ku kvantitatívnemu nárastu hodnoty EUR/RUB), dochádzalo aj k apreciácii eura vo vzťahu ku tureckej líre. V prípade, že je táto hodnota záporná, odpovedá to protismernému pohybu. Hodnota 1 znamená, že kurzy sa pohybujú v rovnakom smere počas celého obdobia, hodnota -1 znamená, že sa po celý čas pohybujú v protismere. Ak by bolo hodnota nulová, menové páry by boli na sebe absolútne nezávislé.Uvedené pohyby kurzov sú výsledom zložitých ekonomických faktorov. Dynamické zmeny faktorov však spôsobujú, že sa korelácia v čase mení. Ak máme teda silnú závislosť v krátkom období, v dlhom období to nemusí platiť.

V časti, v ktorej budeme analyzovať produkty, budeme pracovať s koreláciami menových kurzov a komodít. Ich výpočet uskutočníme v programe Microsoft Excel pomocou zabudovanej funkcie *CORELL(X,Y)*, kde X a Y budú naše vektory s historickými hodnotami vybraných kurzov.

3.3 Generovanie náhodnej veličiny z mnohorozmerného normálneho rozdelenia

Na úvod uveďme definíciu mnohorozmerného normálneho rozdelenia:

Definícia 3.2. Nech $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$, Z_i sú nezávislé, $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$. Zoberieme ľubovoľnú maticu $A_{n\times n}$ a náhodnú veličinu $X = A \cdot Z + \mu$, $\mu \in R^n$. Hovoríme,že X má mnohorozmerné normálne rozdelenie s parametrami μ a $\Sigma = A \cdot A^T$ a značíme $X \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$

To nám ponúka algoritmus na generovanie náhodnej veličiny z $\mathcal{N}_k(\mu, \Sigma)$. Platí totiž, že ak $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, potom $\mu + \sigma X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Ak máme metódu na generovanie štandardného normálneho rozdelenia, môžeme generovať $X_1, X_2, \ldots, X_k$ z $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, pomocou vzorca $X_i = \mu + \sigma Z_i$. Stačí teda vyriešiť problém generovania náhodnej veličiny z $\mathcal{N}(0,1)$. Riešenie ponúka

Box - Mullerova metóda. Jej algoritmus generuje $\mathcal{N}(0,1)$ pomocou dvoch zložiek a a b, ktoré majú rovnomerné rozloženie na itervale $[0,1]$. Tieto hodnoty sa dajú vygenerovať napríklad generátorom náhodných čísel. Potom položíme $c = \sqrt{-2\log a}\cos(2\pi b)$ a dostaneme $c \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Matica Σ je kovariančná matica. Na jej výpočet sa používajú upravené dáta, podobne ako bolo tomu pri výpočte volatility. Najpv si vypočítame podiel po sebe idúcich dní a potom hodnotu zlogaritmujeme. Maticu rozložíme tzv. *Choleskeho rozkladom*. Ten predpokladá pozitívne definitnú štorcovú maticu A. Aplikáciou Choleského rozkladu dostávame maticu A ako súčin dolnej a hornej trojuholníkovej matice, pričom jedna trojuholníkova matica je transpozíciou druhej. Platí teda $A = LL^T$. Na rozklad kovariančnej matice, ktorú si v Exceli spočítame jednoducho pomocnou funkcie *COVAR(X,Y)*, kde X a Y sú príslušné vektory dát môžeme použiť napríklad štatistický program *R* alebo MATLAB.

My budeme výpočty prevádzať v programe Microsoft Excel. Na generovanie náhodnej veličiny z $\mathcal{N}(0,1)$ budeme používať zloženie dvoch funkcií a to *RND()*, ktorá vráti rovnomorne rozdelené číslo väčšie ako 0 a menšie ako 1. Druhou funkciou je *NORMSINV()*, ktorá vráti inverznú funkciu k súčtovému štandardnému normálnemu rozdeleniu. Výsledný tvar bude mať tvar: *NORMSINV(RND())*. Na tomto mieste uveďme príslušnú vetu.

Veta 3.3. *Nech $F(x)$ je distribučná funkcia náhodnej veličiny X a $G(y)$ je distribučná veličina náhodnej veličiny $Y \sim R[0,1]$. Potom $F^{-1}(Y)$ má to isté pravdepodobnostné rozdelenie ako náhodná veličina X.*

Kapitola 4

Analýza štruktúrovaných produktov

4.1 Ponuka produktov na trhu a poplatky

Pozrieme sa na najväčšie bankové inštitúcie na českom trhu. *ČSOB banka* patrí v oblasti štruktúrovaných produktov k najaktívnejším na trhu. K 8.12.2009 má v ponuke viac ako 100 štruktúrovaných produktov. Výška vstupných popolatkov je na úrovni 3%. V prípade predčasného ukončenia klient zaplatí naviac 1% poplatok. *Česká sporitelna* ponúka viac ako 30 produktov ale poplatky sú odlišné. Banka si účtuje 1% vstupný poplatok v upisovacom období a výstupný poplatok 1% až 5% poplatok v závislosti od roku v ktorom sa klient rozhodne produkt ukončiť. Štruktúrované produkty ponúka aj *Komarční banka*, ktorá ich má v ponuke 20. Jej poplatky sú nasledovné. Vstupný poplatok sa pohybuje od 1,5 do 2% v závislosti od výšky investovanej čiastky. Banka si na rozdiel od predchádzajúcich bánk účtuje aj poplatok za správu. Výstupný poplatok pred dňom splatnosti je od 2 do 4% v závislosti od doby zostávajúcej do splatnosti. Výstupný poplatok ku dňu splatnosti je 0%.

4.2 Charakteristika štruktúrovaných produktov a ich princíp

Štruktúrovaný produkt, ako už sám názov napovedá je tvorený z niekoľkých zložiek. To, čo pre klienta môže vyzerať ako pomerne jednoduchý produkt, je však z pohľadu banky súbor niekoľkých investičných zložiek.

Základnou vlastnosťou štruktúrovaných prodkutov je, ako sme už v úvode spomínali, možnosť podieľania sa na raste podkladového aktíva. V prípade negatívneho vývoja klient obdrží finančné prostriedky vo výške odpovedajúcej v definícii produktu. Na českom trhu sú štruktúrované produkty ponúkané napríklad pod názvom zaistené fondy alebo aj garantované štuktúrované depozita. Môžeme sa však stretnúť aj s inými názvami. Vždy ale ide o kombináciu termínovaného vkladu a opcie alebo súboru opcií. Termínovaný vklad umožní banke naplniť prvý sľub, čiže návratnosť vloženej čiastky, kým opcia dáva priestor pre ďalšie zhodnotenie v prípade priaznivého vývoja podkladového aktíva.

Pre bližšie priblíženie predpokladajme, že máme produkt, ktorý garantuje $R\%$ návratnosť vkladu, ktorého výška bude X, úroková sadzba je $r\%$ a dĺžka trvania vkladu je n roky. Banka potom musí uložiť na termínovaný účet sumu vo výške

$$\frac{XR}{(1+r)^n}$$

z čoho vyplýva, že na nákup opcie, pokrytie nákladov a zisk zostáva banke k dispozícii suma vo výške

$$X - \frac{XR}{(1+r)^n}$$

Pre analýzu v tejto diplomovej práci boli vybrané 3 produkty s rozličnými podkladovými aktívami. Všetky produkty garantujú v horšom prípade 100 percentné vrátenie finančných prostriedkov, no v lepšom prípade zhodnotenie závislé od typu podkladového aktíva. Pre analýzu sme vybrali

1. Produkt A, ktorého podkladovým aktívom je menový kurz a ponúka zvýhodnené úročenie, ak kurz neopustí pásmo ohraničené dvoma bariérami.

2. Produkt B, ktorý ponúka 100 percentnú participáciu prípadného rastu 3 mien z koša 5 mien.

3. Produkt C, ktorý ponúka 120 percentnú participáciu na raste indexu vytvoreného z desiatich vopred určených komodít.

4.3 Produkt A

Charakteristika produktu je nasledovná: Výnos je viazaný na vývoj kurzu dvoch mien - referenčného výmenného kurzu. Okrem tohto kurzu sa medzi dealerom a klientom dohodne aj referenčné obdobie a horná i dolná hranica pásma referenčného výmenného kurzu. Výsledný úrokový výnos sa počíta podľa nasledujúceho vzorca:

(A) čiastka depozita zhodnotená X%, pokiaľ referenčný výmenný kurz po dobu referenčného obdobia dosiahol dolnej či hornej hranice

(B) čiastka depozita zhodnotená Y%, pokiaľ referenčný výmenný kurz po dobu referenčného obdobia zotrval v koridore určenom hornou a dolnou bariérou

Analýza produktu

Predpokladajme, že banka stanoví nasledovné parametre

- referenčný výmennný kurz bude EUR/CZK, pričom spotový kurz nech je na úrovni $25,5$ Kč za 1 euro
- referenčné obdobie, t.j. dĺžku trvania vkladu si klient stanoví na 1 rok
- hranice budú stanovené nasledovne: v smere apreciácie kurzu bude dolná hranica stanovená na úrovni $23,5$ Kč za jedno euro a horná hranica odpovedajúca depreciácii kurzu bude stanovená na úrovni $27,5$ Kč za 1 euro. Máme teda symetrické pásmo ± 2 Kč okolo počiatočného kurzu.
- klientský vklad bude predstavovať 10 000 Kč.

Na analýzu budeme potrebovať nasledujúce parametre:

- historickú volatilitu sme si spočítali z dát, ktoré sú k dispozícii v súbore *scoop.xls*. Jej hodnota je $11,55\%$.
- 1 ročná IRS sadzba je pre českú korunu na úrovni $2,34\%$ a pre euro na úrovni $1,22\%$.

Predpokladajme, že banka pri vyššie spomenutých parametroch ponúkne vkladateľovi nasledujúce podmienky

(A) čiastka 10 000 Kč bude zhodnotená $0,5\%$ ak kurz EUR/CZK počas 1 roka dosiahne niektorú zo svojich bariér

(B) čiastka 10 000 Kč bude zhodnotená $5,3\%$ ak kurz EUR/CZK zostane v koridore určenom hornou a dolnou bariérou.

Pri variante (A), ktorú môžeme nazvať garantovanou variantou, musí banka klientovi vyplatiť

$$10\ 000 \times (1 + 0,005) = 10\ 050 \text{ Kč}.$$

Pri variatne (B), ktorá nastane ak kurz zostane v koridore, vyplatí banka klientovi

$$10\ 000 \times (1 + 0,053) = 10\ 530 \text{ Kč}.$$

Banka postupuje nasledovne. Časť z vkladu 10 000 Kč vloží do zero bondu, ktorá nám o 1 rok vyplatí presne 10 050 Kč. Suma, ktorú musíme vložiť do zero bondu je

$$\frac{10\ 050}{1 + 0,0234} = 9\ 820 \text{ Kč}.$$

Z toho plynie, že banke zostáva k naplneniu druhého cieľa 180 Kč. Rozhodne sa preto kúpiť opciu, ktorej podkladovým aktívom bude kurz EUR/CZK. Opcia bude zostavená tak, aby nám v prípade neprekročenia bariér vyplatila sumu, ktorú získame rozdielom

$$10\ 530 \text{ Kč} - 10\ 050 \text{ Kč} = 480 \text{ Kč}.$$

Táto opcia sa niekedy nazýva **cash or nothing**. Ak kurz koridor neopustí, dostaneme totiž 480 Kč, no ak kurz koridor opustí, nedostaneme nič. Ocenenie opcie prevedieme prostredníctvom Monte - Carlo simulácií, kde po každej simulácii diskontujeme sumu 480 Kč v závislosti na tom, či kurz opustil alebo neopustil zvolený koridor. Kurz simulujeme pre 252 obchodných dní a súčasne získavame aj odhad pravdepodobností, s ktorou môžu nastať jednotlivé varianty.

V súbore *scoop.xls* nájdeme celý výpočet s uvedenými parametrami. Vytvorili sme funkciu, ktorá má názov *VypocitajCenuOpcie*. Predstavíme si jej pseudokód:

Algoritmus 1 VypocitajCenuOpcie(vstupné parametre)

```
pre každú simuláciu
    a pre každý obchodný deň
        vygeneruj náhodnú veličinu z N(0,1)
        spočítaj hodnotu menového kurzu
        ulož hodnotu v závislosti na simulácii a dni
        zaznamenaj si neprekročenie bariéry
    Ak neboli bariéry prekročené
        tak ulož diskontovaný nutný zisk
        inak ulož 0
vráť súčet diskontovaných cien vydelený počtom simulácií
```

Skutočný kód funkcie môžeme nájsť už v spomínanom súbore *scoop.xls*. Vstupnými parametrami funkcie sú: výška vkladu, úrok pre variantu A, úrok pre variantu B, spotový kurz EUR/CZK, dolná bariéra, horná bariéra, domáca sadzba, zahraničná sadzba, volatilita a počet simulácií.

Náš výsledok je cena opcie, ktorú musí banka zaplatiť, aby v prípade priaznivého vývoja mohla klientovi vyplatiť peňažné prostriedky zúročené vyššou úrokovou mierou. Ak spočítaná cena opcie má hodnotu 51 Kč, banke by zostal z každých vložených 10 000 Kč priestor na pokrytie nákladov a zisku vo výške

$$180 \text{ Kč} - 51 \text{ Kč} = 129 \text{ Kč}.$$

Na záver pridáme štatistiku, ktorá nám poskytne prehľad, s akou pravdepodobnosťou zostane kurz vo vnútri koridoru, teda ohraničený dvoma bariérami. Pravdepodobnosti sme získali pri 1000 simuláciách a dávajú nám odhad, s akou pravdepodobnosťou bude vklad úročený vyššou úrokovou sadzbou. Budeme meniť nastavenie bariér a z nášho súbora získame príslušné pravdepodobnosti.

Rozsah pásma	Pravdepodobnosť
$23,50 - 27,50$	11%
$23,80 - 27,20$	5%
$24,00 - 27,00$	2%
$24,50 - 26,50$	0%

V prípade hlbšieho záujmu odporúčame čitateľovi meniť parametre v súbore *scoop.xls*, napríklad voľbou nižšej úrovne požadovanej sadzby pre variant (B).

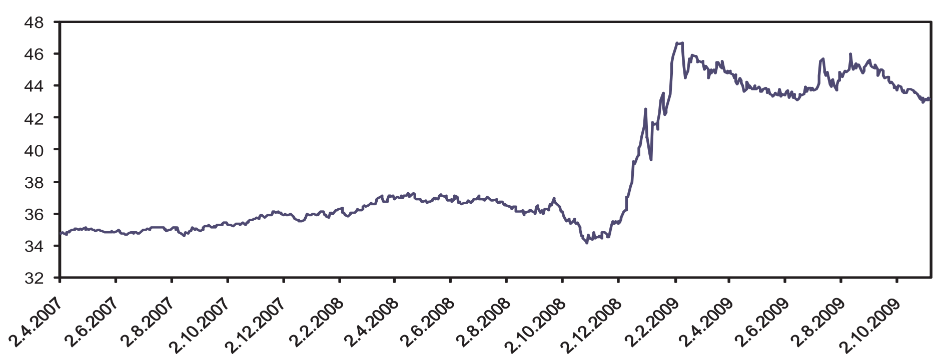
4.4 Produkt B

Ide o zaistený fond, ktorý ponúka 100% garancie vrátenia vložených finančných prostriedkov a možnosť podielať sa na raste mien rozvojových krajín. Minimálna výška vkladu je 100 000 Kč, doba splatnosti vkladu je stanovená na 2 roky a 7 mesiacov, pričom participácia na raste je 100 percent. Výnos investície záleží na vývoji koša výmenných kurzov 5 mien

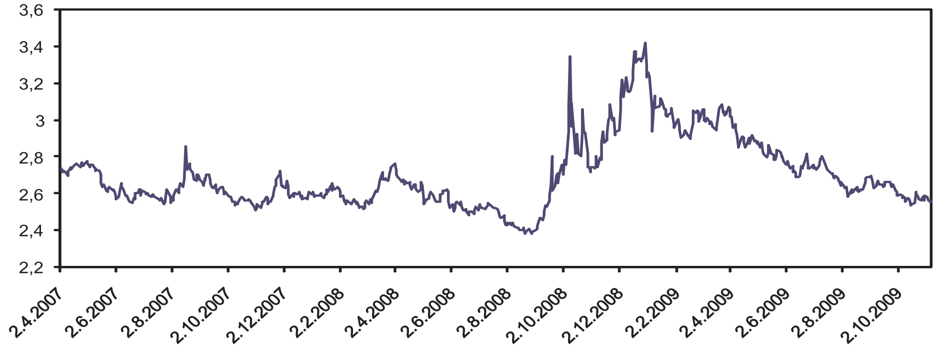
- RUB (Ruský rubeľ)
- BRL (Brazilský real)
- TRY (Turecká líra)
- IDR (Indonézska rupie)
- INR (Indická rupie)

Pri splatnosti bude vyplatených 100% prípadného rastu optimálneho koša 3 mien, z vyššie uvedených 5, ktoré najviac posilia voči euru nad 100% počiatočnej upisovacej hodnoty. Počiatočná hodnota sa stanovuje ako priemer výmenných kurzov za 10 prvých dní vkladu. Konečná hodnota sa stanoví ako priemer výmenných kurzov za posledných 10 dní trvania vkladu.

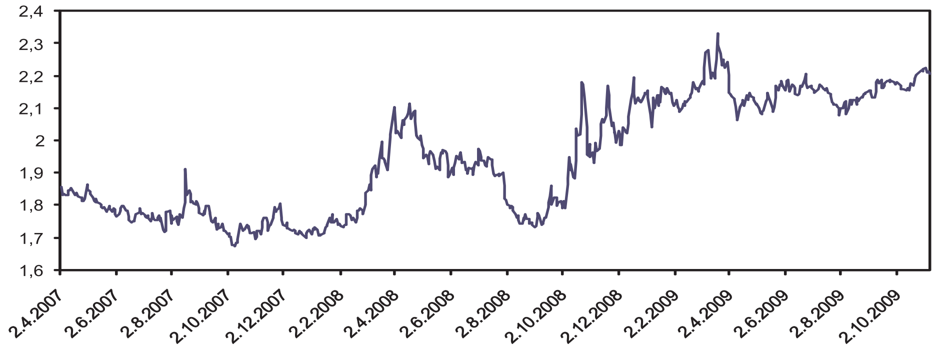
Kým sa dostaneme k samotným výpočtom, pozrieme sa na vývoj kurzov jednotlivých mien k euru z dlhšieho časového hľadiska. Nasledujúce grafy sme získali z dát, ktoré su k dispozícii v súbore *forex.xls*.



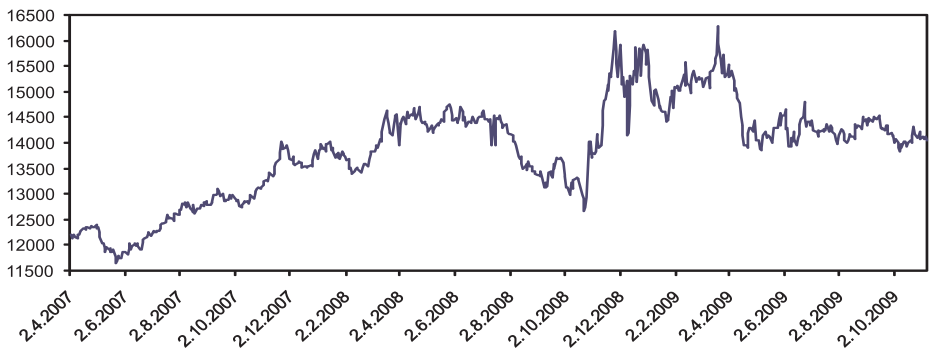
Obr. 4.1: Kurz EUR/RUB



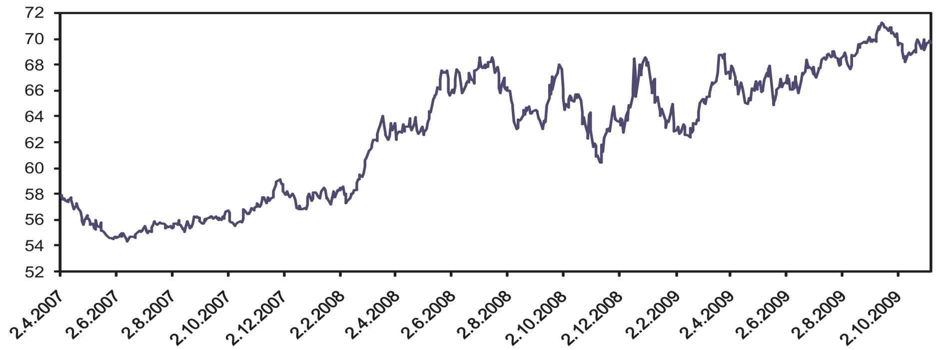
Obr. 4.2: Kurz EUR/BRL



Obr. 4.3: Kurz EUR/TRY



Obr. 4.4: Kurz EUR/IDR



Obr. 4.5: Kurz EUR/INR

Môžeme vidieť pomerne veľké depreciácie kurzov, ktoré nastali v poslednom období. Prvá emisia produktu bola v období od 1.9.2008 do 30.9.2009. V prípade, že si klient v tomto období produkt kúpil, vývoj menových kurzov naznačuje, že zatiaľ mu plynie nárok len na garantovanú čiastku. Predpokladajme však, že si klient kúpi produkt s počiatkom k 6.11.2009. Pripomenieme si odhad trendovej zložky a ukážeme, na akých úrovniach by sa kurzy mali pohybovať v dobe splatnosti nášho produktu.

Náš produkt má dobu splatnosti 2 roky a 7 mesiacov. Na výpočet forwardového kurzu použijeme zero sadzbu pre 2 roky a 7 mesiacov, čím dostaneme aproximáciu budúceho vývoja menového kurzu v požadovanom období. Ak budeme chcieť zistiť forwardový kurz napríklad menového páru EUR/RUB, rozdiel príslušných zero sadzieb upravíme na požadovanú dĺžku obdobia. Takto dostaneme odhad forwardového kurzu, ktorý vstupuje do našej simulácie. Predpokladajme, že začíname simulovať 6.11.2009. Ponúkame tabuľku so spotovými kurzami a s odhadmi fowardových kurzov k 6.6.2012.

Spotové kurzy	Forwardové kurzy
43, 18	50, 12
2, 55	3, 23
2, 21	2, 68
14 059, 59	16 506, 61
69, 50	77, 08

Kurzy majú výrazne depreciačné trendy a to spôsobuje zlacnenie opcie pre banku. Algoritmus výpočtu obsahuje procedúru, ktorá celkový výpočet prevedie. Predstavme si jej pseudo kód (N predstavuje počet obchodní dní od začiatku do konca trvania produktu):

Algoritmus 2 Hlavný výpočet

```
pre každú simuláciu
    vygeneruj prvých 10 iterácií kurzov
    spočítaj ich priemer
    urob časový skok s kurzami do času N - 10
    vygeneruj posledných 10 iterácii
    spočítaj ich priemer
    vypočítaj zhodnotenie kurzov
    vyber 3 najväčšie zhodnotenia
    zhodnoť vklad a diskontuj ho do času 0
vypíš cenu opcie ako priemer diskontovaných hodnôt
```

K dispozícii máme 1 ročnú implikovanú volatilitu, ktorej hodnoty sú nasledovné:

Mena	Kótovaná volatilita
EUR/RUB	$12,85\%$
EUR/BRL	$15,36\%$
EUR/TRY	$14,10\%$
EUR/IDR	$13,00\%$
EUR/INR	$12,13\%$

Pre porovnanie, historickú volatilitu môžeme nájsť v súbore *forex.xls*.

Ako bolo uvedené v definícii produktu, minimálna výška vkladu je 100 000 Kč. Banka vloží túto sumu do dlhopisu trvajúceho 2 roky a 7 mesiacov, ktorý ponúka úrokovú sadzbu 3,77% p.a.. To znamená, že bude mať na nákup opcie a na pokrytie zisku sumu vo výške

$$100\ 000\ - \frac{100\ 000}{(1+0,0377)^{\frac{31}{12}}} = 9\ 117\ \text{Kč}$$

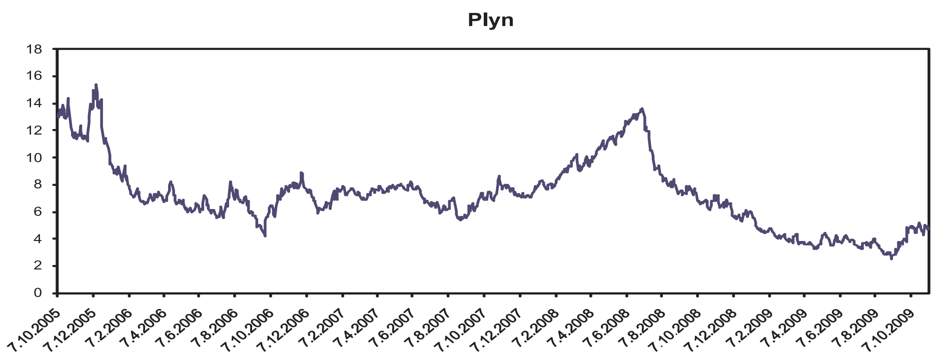
Námi prevedené simulácie vykazujú nulovú cenu opcie. V skutočnosti však cena opcie bude kladná, pretože trh sa neriadi Black - Scholesovým modelom. O nedostatkoch Black - Scholesovho modelu sa môžeme dočítať v [2]. Ako doplnok uvádzame v prílohe korelácie medzi jednotlivými menovými pármi.

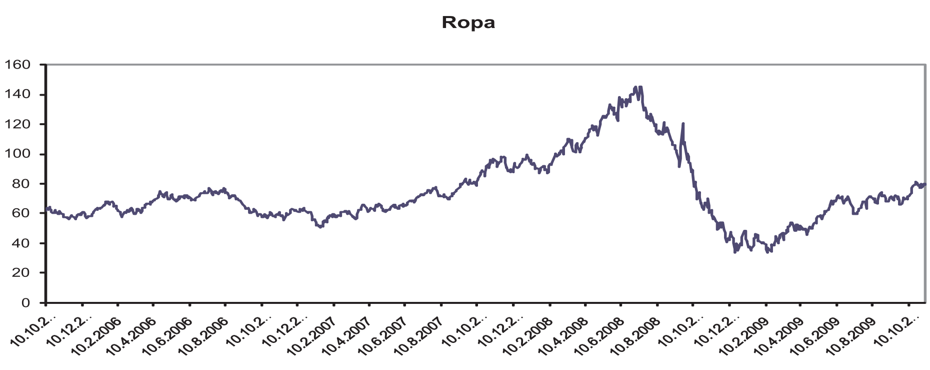
4.5 Produkt C

Minimálna investícia pri tomto produkte je bankou stanovená na 5 000 Kč. Doba splatnosti vkladu je 4 roky a 7 mesiacov. Výnos vkladu je viazaný na komoditný index Broad Commodity Index, ktorý je vytvorený z nasledujúcich komodít: ropa, zemný plyn, olovo, pšenica, hliník, meď, zinok, nikel, kukurica a sója.

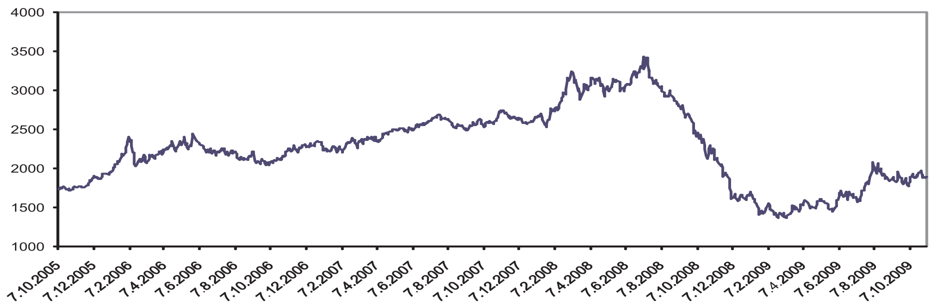
Každá komodita má 10% podiel na indexe. Ku dňu splatnosti banka vyplatí vklad plus výnos, ktorý je daný násobkom miery participácie a skutočným rastom indexu. Táto participácia je stanovená na úrovni 120%. Z definície produktu vyplýva, že je zaistená návratnosť vkladu.

Na začiatok ukážme, ako sa vyvíjali ceny jednotlivých komodít.

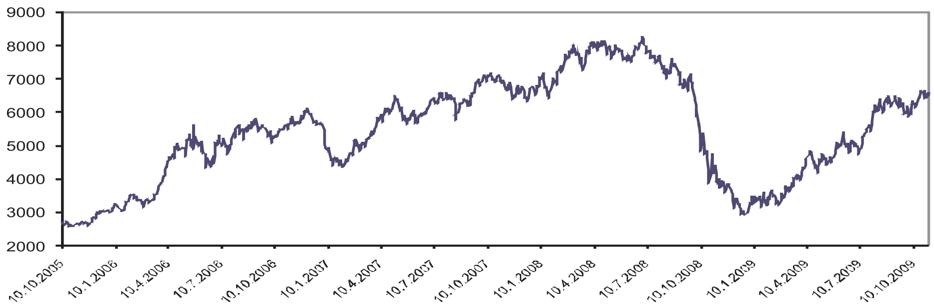




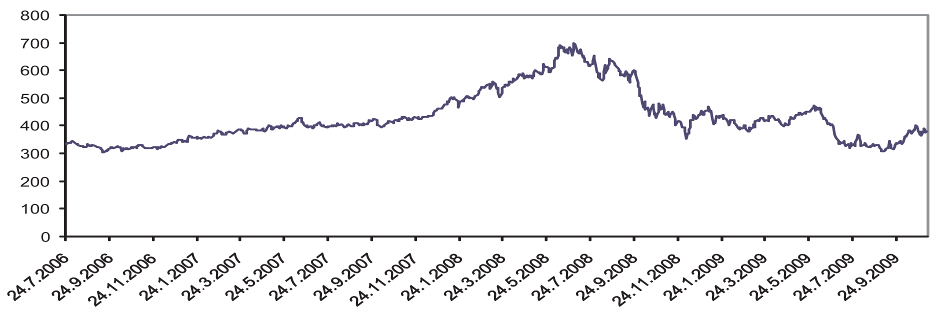
Hliník



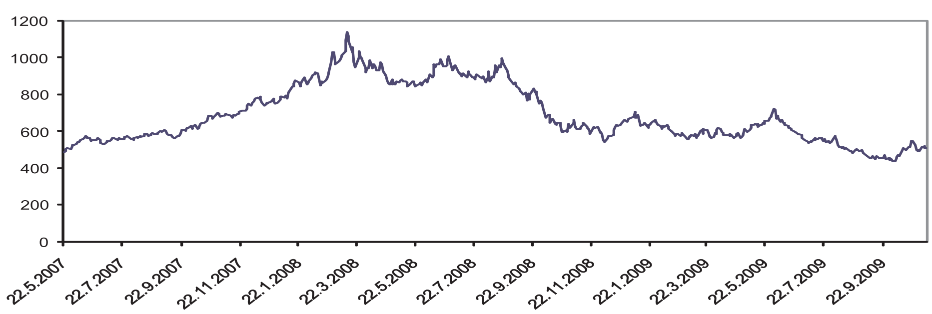
Meď



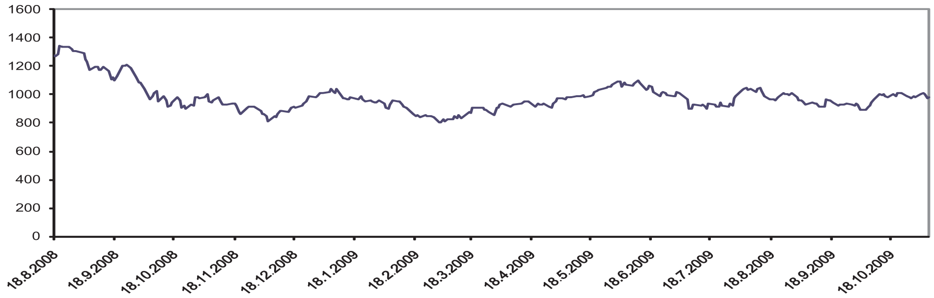
Kukurica



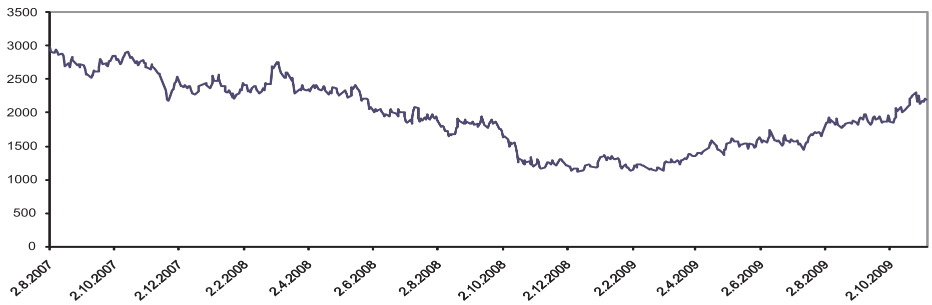
Obilie



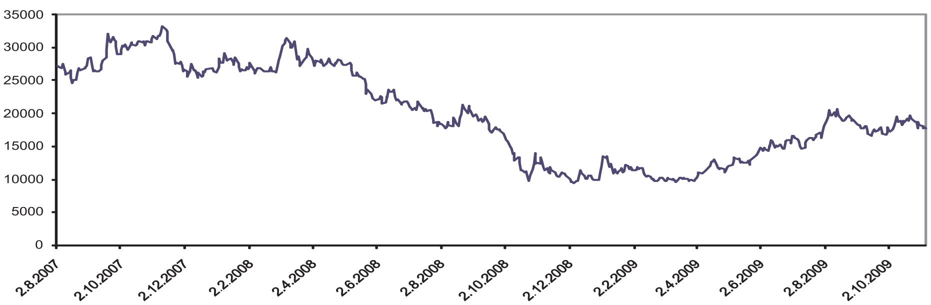
Sója



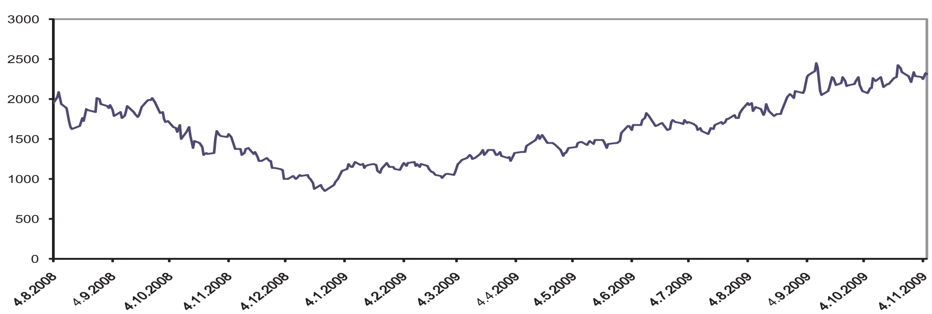
Zinok



Nikel



Olovo



Hodnoty 1 - ročnej implikovanej volatility sú nasledovné:

Komodita	Volatilita
Plyn	$57,00\%$
Ropa	$40,30\%$
Hliník	$44,00\%$
Meď	$67,00\%$
Kukurica	$45,00\%$
Obilie	$64,00\%$
Sója	$33,00\%$
Zinok	$43,00\%$
Nikel	$37,50\%$
Olovo	$50,00\%$

V prípade záujmu môže nájsť čitateľ v súbore *komodity.xls* nami spočítanú historickú volatilitu. Ďalším parametrom, ktorý zohráva pri našom modelovaní najdôležitejšiu úlohu je trendová zložka. Z trhu sme získali forwardové kurzy pre 4 roky a pre 5 rokov. Spočítali sme hodnoty forwardových kurzov pre 4 roky a 7 mesiacov. Ich hodnoty sú nasledovné:

Komodita	Spot	Forward
Plyn	$7,73$	$7,33$
Ropa	$80,40$	$91,13$
Hliník	$1895,75$	$2265,75$
Meď	$6557,50$	$6338,67$
Kukurica	$384,00$	$480,00$
Obilie	$521,00$	$799,25$
Sója	$999,00$	$973,00$
Zinok	$2206,00$	$2238,00$
Nikel	$17843,00$	$16208,08$
Olovo	$2328,50$	$2310,00$

Na zistenie ceny opcie, ktorá vyplatí 120% participáciu na raste indexu komodít sme naprogramovali procedúru *SpustiVypocet*. Trendovú zložku sme odhadli ako rozdiel medzi forwardovým a spotovým kurzom vzhľadom ku spotovému kurzu. Na simulovanie použijeme vzťah (2.32), pričom exponent si rozdelíme na dve časti podľa sčítancov. Teraz môžeme odprezentovať pseudokód:

Algoritmus 3 Hlavný výpočet

spočítaj trendovú zložku pre každú komoditu
spočítaj prvú časť exponentu
a pre každú simuláciu preveď
    vygeneruj náhodný vektor z $\mathcal{N}_{10}(\mu, \Sigma)$
    spočítaj druhú časť exponentu
    sčítaj prvú a druhú časť exponentu
    vypočítaj hodnotu kurzu
    urči zhodnotenie
    vypočítaj zhodnotenie kurzov
    vypočítaj diskontovanú hodnotu z vkladu $\times$ participácia
vydeľ diskontovanú hodnotu počtom simulácií
zobraz cenu

Analýza produktu

Predpokladajme, že klient vloží finančné prostriedky vo výške 10 000 Kč. Banka v tomto prípade musí do zero bondu vložiť

$$\frac{10\ 000}{(1+0,03137)^{55/12}} = 8\ 680 \text{ Kč}.$$

kde 3,137% je zero sadzba pre 4 roky a 7 mesiacov. Z toho vyplýva, že jej na nákup opcie zostáva

$$10\ 000 - \frac{10\ 000}{(1+0,03137)^{55/12}} = 1\ 320\text{Kč}.$$

Cena opcie, ktorú sme vypočítali má hodnotu približne 29 Kč. To by znamenalo, že banke zostáva na pokrytie nákladov a na zisk suma vo výške 1 291 Kč. V dodatku A, obrázok (A.3) môžeme nájsť histogram výnosov. Na ose X nanášame 30 skupín, ktoré odpovedajú percetám. Napríklad skupina 15 zahŕňa výnosy vo výške od 7,6 do 7,7%. Presné delenie môžeme nájsť v súbore *komodity.xls* na liste *histogram data*.

Kapitola 5

Záver

V práci sme sa zaoberali štruktúrovanými produktami, ktoré sú v ponuke českých bánk. V úvodných kapitolách sme sa venovali teoretickej časti oceňovania opcií. Táto problematika je však ďaleko rozsiahlejšia, preto čitateľa odkazujeme napríklad na literatúru uvedenú v zozname.

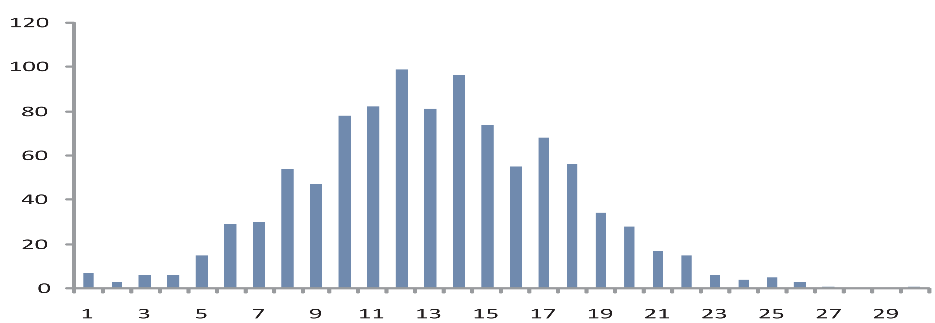
V hlavnej časti si vyberáme 3 produkty, ktoré rozkladáme na zložky. Pri každom produkte vypočítame sumu, ktorú musí banka vložiť do zero bondu, aby naplnila svoj prísľub, že klientovi vyplatí v dobe splatnosti prinajhoršom sumu vo výške $R\% \times$ výška vkladu. Výška sadzby R závissí od typu produktu. Ďalej určujeme cenu opcie, ktorú musí banka zaplatiť a sumu finančných prostriedkov, ktoré zostanú banke na úhradu nákladov a na zisk. Vo výpočtoch simulujeme vývoj ceny podkladového aktíva. Všetky výpočty môže čitateľ nájsť v súboroch, ktoré sú na CD priloženému k práci.

Dodatok A

Tabuľky

Tabuľka korelácií kurzov					
	EUR/RUB	EUR/BRL	EUR/TRY	EUR/IDR	EUR/INR
EUR/RUB	1,00	0,38	0,84	0,60	0,71
EUR/BRL	0,38	1,00	0,57	0,49	0,24
EUR/TRY	0,84	0,57	1,00	0,71	0,79
EUR/IDR	0,60	0,49	0,71	1,00	0,73
EUR/INR	0,71	0,24	0,79	0,73	1,00

Obr. A.1: Korelácie menových kurzov



Obr. A.2: Histogram výnosov

Tabuľka korelácií komodít										
	plyn	ropa	hliník	meď	kukurica	obilie	soja	zinok	nikel	olovo
plyn	1,00	0,47	0,76	0,13	0,78	0,73	0,50	-0,08	0,03	-0,09
ropa	0,47	1,00	0,87	0,90	0,52	0,47	0,81	0,72	0,79	0,71
hliník	0,76	0,87	1,00	0,68	0,63	0,58	0,73	0,44	0,58	0,45
meď	0,13	0,90	0,68	1,00	0,17	0,13	0,65	0,92	0,94	0,91
kukurica	0,78	0,52	0,63	0,17	1,00	0,96	0,73	-0,06	0,03	-0,13
obilie	0,73	0,47	0,58	0,13	0,96	1,00	0,74	-0,12	0,03	-0,20
soja	0,50	0,81	0,73	0,65	0,73	0,74	1,00	0,49	0,63	0,41
zinok	-0,08	0,72	0,44	0,92	-0,06	-0,12	0,49	1,00	0,92	0,95
nikel	0,03	0,79	0,58	0,94	0,03	0,03	0,63	0,92	1,00	0,89
olovo	-0,09	0,71	0,45	0,91	-0,13	-0,20	0,41	0,95	0,89	1,00

Obr. A.3: Korelácie komodít

Literatúra

[1] Anděl, J.: *Statistické metody.* Matfyzpres, Praha 1998

[2] Bunčák, T.: *Nedostatky Black-Scholesovho modelu*, Bakalárska práca, MFF UK Praha, 2007

[3] Cipra, T.: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*, Ekopress, 2005

[4] Cox, C.C.: Ross S.A.; Rubinstein, M.: *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics, Vol.7, Issue 3, pages: 229-263, 1979.

[5] Dupačová, J., Hurt, J., Štěpán, J.: *Stochastic Modeling in Economics and Finance.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht 2002.

[6] Hull, J.: *Options, Futures and Other Derivatives.*, Pearson Education, Inc. New Persey 2003.

[7] Matuštík, O.: *Dlhopisy zajištěné aktivy (ABS)*, Diplomová práca, MFF UK Praha, 2007

[8] Oksendal, B.: *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications (Fifth edition)*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[9] Shreve, E.: *Stochastic Calculus in Finance*, Preprint, Carnegie Mellon University, 1996.